

אינדוקציה מתמטית

דף עבודה – שאלון 571



היכנסו ליישומון



שלכם, צפו בסרטון



לאחר שתתחברו לחשבון וענו על השאלות הבאות:



סרטון

יישומון

תזכורת: אינדוקציה מתמטית היא שיטה המשמשת להוכחת טענה המתייחסת למספרים טבעיים. בכדי להוכיח שטענה כלשהי מתקיימת לכל מספר טבעי נשתמש בעיקרון האינדוקציה על פיו עלינו להוכיח שמתקיימות שתי הדרישות הבאות:

(1) המספר 1 מקיים את הטענה (שלב הבסיס).

(2) אם מספר טבעי כלשהו מקיים את הטענה אז גם המספר העוקב לו מקיים את הטענה. (שלב הצעד או הנחת האינדוקציה).

כלומר, בשלב הראשון בודקים שהטענה נכונה ל $n = 1$, ובשלב השני מניחים שהטענה נכונה למספר טבעי $n = k$ ומוכיחים שהיא נכונה גם עבור $n = k + 1$.

אקסיומת האינדוקציה קובעת כי מקיומן של שתי דרישות אלה נובע שהטענה מתקיימת לכל מספר טבעי.

שימו לב: בכל פתרון, חשוב להראות בבירור את שלב הבסיס, את הנחת האינדוקציה ואת ההוכחה.

תזכורת: הגדרת עצרת של מספר טבעי: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ כמו כן מגדירים: $0! = 1$.

(1) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת כי השוויון הבא מתקיים לכל n טבעי:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת כי השוויון הבא מתקיים לכל n טבעי:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

(3) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת כי השוויון הבא מתקיים לכל n טבעי:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

(4) דנה רצתה לבדוק אם השוויון הבא מתקיים לכל n טבעי: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n^2 + n + 1}{2}$

לשם כך השתמשה באינדוקציה והראתה שאם מניחים שהשוויון נכון עבור $n = k$ טבעי כלשהו, הוא נכון גם לגבי $n = k + 1$ והסיקה מכך כי השוויון נכון.

א. בדקו שאכן טענתה של דנה מתקיימת, (כלומר, הראו כי הטענה נכונה ל- $n = k + 1$ כאשר מניחים שהיא נכונה ל- $n = k$).

- ב. בדקו: (1) האם הטענה נכונה עבור $n = 3$?
(2) האם הטענה נכונה עבור $n = 1$?
(3) האם לדעתכם הטענה נכונה עבור n כלשהו?

ג. מה הייתה טעותה של דנה?

ד. תקנו את הביטוי בצד ימין של המשוואה כך שהטענה תהיה נכונה, והוכיחו את נכונותה באינדוקציה.

(5) דני רצה לבדוק אם השוויון הבא מתקיים לכל n טבעי: $2^n = n^2 - n + 2$.
דני בדק וראה כי השוויון אכן מתקיים עבור $n = 1, n = 2, n = 3$ והסיק כי השוויון נכון לכל n כי זכר במעורפל שלפי אקסיומת האינדוקציה, אם הטענה נכונה ל- $n = 1$, ובנוסף אם בהנחה שהיא נכונה ל- $k = 2$ ומראים שהיא נכונה גם ל- $k + 1$, אז היא נכונה לכל n .

- א. בדקו את טענתו של דני לגבי $n = 1, n = 2, n = 3$.
האם הם אכן מקיימים את המשוואה?
ב. האם דני צדק במסקנתו? הוכיחו או הפריכו אותה.
ג. מה הייתה טעותו של דני?

תזכורת:

- א. כדי להוכיח באינדוקציה שטענה נכונה עבור כל n טבעי אי-זוגי:
(1) נבדוק שהטענה נכונה עבור $n = 1$.
(2) מההנחה שהטענה נכונה עבור $n = k$ (הוא מספר טבעי אי-זוגי כלשהו) נוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k + 2$.
ב. תזכורת: כדי להוכיח באינדוקציה שטענה נכונה עבור כל n טבעי זוגי:
(1) נבדוק שהטענה נכונה עבור $n = 2$.
(2) מההנחה שהטענה נכונה עבור $n = k$ (הוא מספר טבעי זוגי כלשהו) נוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k + 2$.

(6) הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי אי-זוגי מתקיים:

$$3 + 7 + 11 + \dots + (2n + 1) = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

(7) הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$4 + 10 + 16 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n + 2)}{4}$$

(8) הוכיחו בעזרת אינדוקציה והנוסחה לנגזרת של מכפלה את הנוסחה הבאה:
עבור נגזרת של x^n עבור n טבעי: $(x^n)' = nx^{n-1}$. (תזכורת: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$)

תשובות סופיות:

(1) נבדוק עבור $n = 1$: $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$. התקבל פסוק אמת.

הנחת האינדוקציה עבור $n = k$: $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

נוכיח כי הטענה מתקיימת עבור $n = k + 1$.

צ"ל: $1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

נקבל: $\frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k \cdot (k+1) + 2 \cdot (k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

(2) נבדוק עבור $n = 1$: $1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2} \right)^2 = 1^2$. התקבל פסוק אמת.

הנחת האינדוקציה עבור $n = k$: $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2$.

נוכיח כי הטענה מתקיימת עבור $n = k + 1$, צ"ל:

$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2$

נקבל: $\left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + k + 1 \right) =$

$= (k+1)^2 \left(\frac{k^2 + 4k + 4}{4} \right) = \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{2^2} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2$

(3) שלב הבסיס: נבדוק עבור $n = 1$: $1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$. התקבל פסוק אמת.

הנחת האינדוקציה עבור $n = k$: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + k \cdot k! = (k+1)! - 1$.

נוכיח כי הטענה מתקיימת עבור $n = k + 1$, צ"ל:

$1 \cdot 1! + \dots + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+2)! - 1$

$(k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+1)! (k+1+1) - 1 = (k+2)(k+1)! - 1 = (k+2)! - 1$

(4) ב. (1) לא (2) לא (3) לא.

ג. דנה לא ביצעה את הצעד הראשון בהוכחת האינדוקציה - בדיקה עבור $n = 1$.

ד. $\frac{n^2 + n}{2}$.

(5) א. כן. ב. לא, אפשר להפריך ע"י בדיקה של $n = 4$ למשל.

ג. דני ביצע את הצעד הראשון אבל שגה בהנחת האינדוקציה כאשר הניח $k = 2$ ולא $n = k$.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) הוכחה על פי אינדוקציה כי $(x^n)' = nx^{n-1}$ נכון לכל n טבעי:

(1) שלב הבסיס - בדיקה עבור $n=1$: $(x^1)' = 1x^0 = 1$ ← $x' = 1$ ← אמת.

(2) הנחת האינדוקציה עבור $n=k$: $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$.

(3) הוכחה עבור $n=k+1$:

נוכיח כי- $(x^{(k+1)})' = (k+1) \cdot x^{(k+1)-1}$

$$(x^{(k+1)})' = (x^k \cdot x)' = 1 \cdot x^k + x \cdot (x^k)' = x^k + x \cdot kx^{k-1} = x^k + kx^k = (k+1)x^k$$